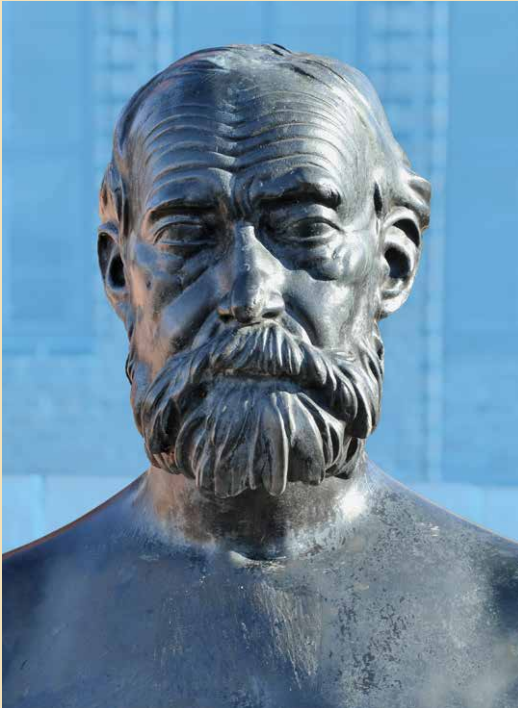


Edith Framm · Joachim Framm · Dieter Schott

Gottlob Frege



Die formale Logik

Ein Gespräch in der Schule

Edith Framm · Joachim Framm · Dieter Schott

Gottlob Frege Die formale Logik

Ein Gespräch in der Schule



Titelbild: Bronzebüste Gottlob Freges von Karl-Heinz Appelt,
aufgestellt auf dem Areal der Kirche St. Marien in Wismar

© 2025 Edith und Joachim Framm, Dieter Schott

Gesamtherstellung: Verlag Koch und Raum Wismar OHG

Fotos: Foto Volster GbR, Wismar; Bild Rückseite: C. Raum/ChatGPT

Direktbezug: joachim.framm@t-online.de und dieter.schott@hs-wismar.de

ISBN: 978-3-910922-22-8

Vorwort

Immer wieder geht es um die Wahrheit, im Alltag, in der Politik und in der Wissenschaft. Menschen streiten sich, glauben, trotz widersprüchlicher Aussagen, die Wahrheit zu besitzen. Jeder hat seine eigene Perspektive, eigene Erfahrungen, eigene Interessen und eigene Gefühle. Haben alle recht? Wohl kaum. Haben alle unrecht? Schon eher. Objektivität ist schwer zu erreichen, aber in der Wissenschaft ist sie unverzichtbar. Gottlob Frege wies daher auf den Unterschied von ‚Wahrsein‘ und ‚Fürwahrhalten‘ hin.

Die Logik hatte nach ihm die Aufgabe, die Gesetze des Wahrseins zu erkennen. Er entwickelte die Begriffsschrift, eine formale zweiwertige Logik, in der aus unbezweifelbar wahren Grundaussagen durch logische Verknüpfungen weitere wahre Aussagen gewonnen und andere als falsch erkannt werden. Damit wurde Frege zum Vater der modernen Logik, weil alle vorher vorhandenen Logikansätze nicht das leisteten, was die moderne Wissenschaft brauchte.

Viele Zeitgenossen verstanden Frege nicht, andere sahen ihn nur als Konkurrenten. Seine formale zweiwertige Logik ist die Grundlage für die Computertechnik und deren Anwendungen. Heute sind diese Errungenschaften selbstverständlich, obwohl viele nicht wissen, wer die Grundlagen schuf. Das ist schade! Gottlob Frege ist einer der größten Denker der Menschheitsgeschichte, ein Mecklenburger aus Wismar, heimatverbunden und wanderlustig, Streitbar und verletzlich.

Das vorliegende Schulgespräch soll dazu dienen, die einfachsten Grundlagen seines großen Werkes verständlich zu machen.

*Prof. Dieter Schott,
Gottlob-Frege-Zentrum der Hochschule Wismar*



*Gottlob Freges
Geburtshaus in der
Böttcherstraße (Mitte)*

*Foto: A. Eulert, 1936
(Quelle: SCHABBELL –
Stadtgeschichtliches Museum
der Hansestadt Wismar, I 405)*



*Große Stadtschule Wismar,
Neubau im gotischen Stil 1893,
Geschwister-Scholl-Gymnasium*

*Gespräch des Mathematiklehrers, Herrn Krause,
mit seinen Schülern Anja, Paula und Ronny unter Nutzung
eines Smartboards*

Anja: Wisst ihr schon das Neueste?

Paula: Was denn, Anja?

Anja: Wir sollen uns mit Gottlob Frege beschäftigen!

Ronny: Gottlob Frege! Wer ist das denn?

Anja: Er ist aus Wismar und soll 2025 seinen 100. Todestag haben.

Paula: Ich schaue im Handy nach. Moment, hier, das muss er sein. Es gibt tatsächlich einen „Gottlob Frege“. Im Netz steht eine Menge über ihn.

Anja: Gottlob, ist das sein Vorname? Eigenartig. Na ja, 1925 gestorben. Das ist schon eine Weile her.

Paula: Ja, so heißt der, Gottlob Frege. Er ist 1848 hier in Wismar geboren, gleich um die Ecke in der Böttcherstraße, und er ist in unsere Penne gegangen, die Große Stadtschule, die heute nach den Geschwistern Scholl benannt ist. Er hat in Jena und Göttingen studiert und war dann Professor für Mathematik in Jena. Frege soll ein bedeutender Logiker gewesen sein.

(Der Lehrer kommt herein)

Anja: Herr Krause, was ist eigentlich ein Logiker?

Ronny (ruft dazwischen): Logik ist doch, wenn etwas logisch ist, oder? Wenn ich nichts zu essen kriege, bekomme ich Hunger. Logisch.

Anja: Du machst es dir wieder einmal zu einfach, Ronny.

Lehrer Krause: Ihr seid also schon bei Gottlob Frege? Nun gut. Logik, das ist ein Begriff, aber auch eine Wissenschaft. So wie Ethik darüber Auskunft gibt, was gut ist, und Ästhetik alles beschreibt, was schön ist, so ist die Logik eine Wissenschaft, bei der es um die Wahrheit geht. Sie lässt durch festgelegte Verknüpfungen von Gedankeninhalten erkennen, ob etwas wahr oder falsch ist. Da sind wir übrigens ganz schnell beim Computer. Solche Vorgänge finden ständig im Computer statt. Logisches Denken heißt, die Wahrheit von Gedanken oder genauer von Aussagen bzw. Aussagenverknüpfungen zu prüfen.

Anja: Sag ich doch, das ist ganz schön kompliziert!

Lehrer Krause: So schlimm wird es nicht, zumindest ganz am Anfang. Ich will euch jetzt nur so viel erklären, dass ihr eine Ahnung davon bekommt, was Frege so weltberühmt gemacht hat. Schon in der Antike haben sich Philosophen, wie Aristoteles, damit beschäftigt, wie man durch Verknüpfung von Aussagen logisch schließen kann. Betrachten wir zum Beispiel folgenden Zusammenhang (er zeigt ihn zugleich auf dem Smartboard).

Satz 1: Alle Griechen sind Menschen.

Satz 2: Alle Menschen sind sterblich.

Aus diesen beiden Sätzen kann man eine Schlussfolgerung ziehen, und diese lautet:

Satz 3: Alle Griechen sind sterblich.

Anja und Paula: Das klingt logisch!

Lehrer Krause: Oder nehmen wir ein anderes Beispiel aus der Zahlentheorie. Es ist etwas komplizierter:

Satz 1: Keine ungerade Zahl ist durch 2 teilbar.

Satz 2: Einige ungerade Zahlen sind durch 5 teilbar.

Daraus folgt

Satz 3: Einige durch 5 teilbare Zahlen sind nicht durch 2 teilbar.

Ronny: Hier kommt das Wort ‚alle‘ gar nicht mehr vor, dafür ‚einige‘, ‚keine‘ und ‚nicht‘. Der Schluss scheint zu stimmen, denn 5, 15, 25 usw. sind nicht durch 2 teilbar. Aber 10, 20, 30 usw. sind durch 2 teilbar.

Lehrer Krause: Schön, Ronny. Auf solchen Methoden des logischen Schließens hat man schon vor mehr als 2.000 Jahren eine ganze Wissenschaft errichtet. Das kann man heute nur bewundern. Als Frege 1875 begann, sich in Jena mit solchen Fragen in Bezug auf die Mathematik zu beschäftigen, waren es immer noch Aristoteles und die Antike, bei denen man in logischen Fragen Rat suchte. Aber es gab ein Problem. Schon die Umgangssprache ist nicht so einfach aufgebaut, dass man alles in solche Schlussformen pressen kann. Außerdem kommt in der Wissenschaft noch die Forderung nach Exaktheit hinzu. Wenn man ganz genau wissen will, was wahr ist, dann müssen alle Ausdrücke, alle Worte, die man verwendet, eindeutig und unmissverständlich sein. Ihr wisst, wie schwierig es in der Umgangssprache ist, Gedanken so auszudrücken, dass alle Hörer oder Leser sie im gleichen Sinne verstehen. In der Wissenschaft muss man aber alle Fehlerquellen ausmerzen, um zu sicheren Urteilen zu kommen. Nur so ist logische Wahrheit erreichbar, nur so kommt man letztlich zu soliden Erkenntnissen, die unsere Welt voranbringen.

Insbesondere trifft das auf die Mathematik zu. Frege stellte daher fest, dass eine neue Form der Logik erforderlich ist. In seiner weltberühmten Schrift, der „Begriffsschrift“, hat er eine solche Logik entwickelt. Er geht am Anfang darauf ein, ob und wie eine Aussage aus einer anderen folgt. Zur Erläuterung möchte ich euch zwei Sätze vorstellen. Sie lauten (er zeigt sie auf dem Smartboard):

Satz A: Die Sonne ist aufgegangen.

Satz B: Die Sonne scheint in mein Schlafzimmer.

Prüfen wir diese Sätze. Beide haben eine Aussage, einen Inhalt, den man beurteilen kann. Der Inhalt kann entweder wahr oder falsch sein. Ist der Inhalt des Satzes wahr, beurteilen wir ihn mit „ja“. Ist der Inhalt des Satzes falsch, beurteilen wir ihn mit „nein“.

Daneben spielt auch die **Verneinung** eine Rolle. Wenn ein Satz wahr bzw. falsch ist, so ist seine Verneinung falsch bzw. wahr.

Anja: Dann gibt es bei Frege keine Worte wie „ungefähr“ oder „vielleicht“ oder „nicht entscheidbar“?

Lehrer Krause: So ist es. Es gibt in logischen Zusammenhängen bei Frege nur „ja“ oder „nein“. Etwas Drittes ist nicht zugelassen. Ja oder nein, wie ihr es vom Computer kennt, 1 oder 0, binär also. Wenn man jetzt diese zwei Sätze aneinanderreicht, ergeben sich grundsätzlich nur vier Möglichkeiten der Kombination (der Lehrer zeigt eine Tabelle auf dem Smartboard).

		B	A
1.	A wird bejaht und B wird bejaht	ja	ja
2.	A wird bejaht und B wird verneint	nein	ja
3.	A wird verneint und B wird bejaht	ja	nein
4.	A wird verneint und B wird verneint	nein	nein

Ronny: Damit kann ich nichts anfangen.

Paula: Warte mal ab Ronny. Du wirst schon sehen.

Lehrer Krause (spricht unbeirrt weiter): Jetzt kommt die sogenannte **Bedingtheit** ins Spiel.

Ronny: Was ist das denn?

Lehrer Krause: Es werden gedankliche Inhalte verknüpft, die in einen gewissen Zusammenhang gestellt werden können. Es kann sich zum Beispiel um Ursache und Wirkung handeln.

Ich erkläre es Euch an diesen beiden Sätzen. Satz A besagt: „Die Sonne ist aufgegangen.“ Das ist an jedem Tag im Jahr ein genau definierter Zeitpunkt. Satz B ist auch eindeutig zu überprüfen. Entweder scheint die Sonne in mein Schlafzimmerfenster oder nicht. Wenn ich die Bedingtheit beider Sätze entscheiden will, brauche ich noch eine Zusatzinformation: *Mein Schlafzimmer hat ein Fenster nach Osten hin.*

Ich kann nun sagen:

‚Wenn die Sonne in mein Schlafzimmer scheint (B), so ist die Sonne aufgegangen (A).‘

Also formalisiert ausgedrückt: ‚wenn B – so A‘.

Anja: Das leuchtet ein.

Lehrer Krause: Aber nun schaut Euch einmal die vier möglichen Kombinationen der beiden Sätze an. Es entsteht die folgende Urteilstabelle (der Lehrer zeigt diese jetzt auf dem Smartboard):

In der linken und mittleren Spalte stehen oben die Inhalte B und A, darunter, entsprechend den vier bereits genannten Möglichkeiten, die Bewertung der Inhalte. In der rechten Spalte seht Ihr dann das Ergebnis für die Prüfung der Bedingtheit.

	B	A	wenn B – so A
1.	ja	ja	ja
2.	nein	ja	ja
3.	ja	nein	nein
4.	nein	nein	ja

Stellt Euch bitte die Situation in diesem Schlafzimmer vor, dessen Fenster nach Osten gerichtet ist. Anja, probiere es mal mit der ersten Zeile.

Anja (etwas zögernd, dann sicherer): Wenn die Sonne in das Schlafzimmer scheint, *dessen Fenster ja nach Osten geht*, ist die Sonne bereits aufgegangen. Die in der ersten Zeile genannte Bedingtheit ist zu bejahen.

Lehrer Krause: Die erste Zeile ist wohl jedem verständlich. Paula, bitte die zweite Zeile.

Paula: Wenn die Sonne bei bewölktem Himmel oder vielleicht bei dicken Gardinen vor dem Fenster *nicht* in mein Schlafzimmer scheint, aber die Sonne doch aufgegangen ist, wird die oben genannte Bedingtheit nicht falsch, oder irre ich mich?

Lehrer Krause: Richtig, wir wollen sie daher bejahen. Denn es gibt keine andere Wahl. Wir würden sie nicht bejahen, wenn die Bedingtheit etwa lautete: ‚Nur wenn die Sonne in mein Schlafzimmer scheint, ist die Sonne aufgegangen‘ – das steht da aber nicht. Nun, bitte Ronny, die dritte Zeile.

Ronny: Wenn die Sonne in dieses Zimmer scheint, dann ist es unmöglich zu behaupten, dass die Sonne nicht aufgegangen ist. Die Bedingtheit ist folglich zu verneinen.

Lehrer Krause: Und die vierte Zeile, Ronny?

Ronny (zögernd): Wenn die Sonne tatsächlich nicht in das Schlafzimmerfenster scheint und in dieser Zeit die Sonne nicht aufgegangen ist, dann kann ich die oben genannte Bedingtheit trotzdem nicht als falsch bezeichnen. Sie müsste daher bejaht werden?

Lehrer Krause: Die Tabelle stimmt also?

Anja: Ja, irgendwie schon, aber in den Zeilen zwei und vier in der Tabelle bin ich eher unsicher.

Lehrer Krause: Das ist verständlich. Da will ich dir noch etwas helfen. In der dritten Spalte der Tabelle wird lediglich vermerkt, ob die Bedingtheit ‚wenn B – so A‘ zu bejahen oder zu verneinen ist. In der ersten Zeile ist sie zweifelsfrei zu bejahen. Und in der dritten Zeile ist sie eben zu verneinen. Denn es kann doch nicht sein, dass die Sonne in ein nach Osten gelegenes Schlafzimmer scheint und die Sonne nicht aufgegangen sein soll. Das sind die beiden entscheidenden Fälle. In den Zeilen zwei und vier ist hingegen die Bedingtheit nicht zwingend zu verneinen. Also müssen wir sie

zwangsläufig bejahen. Hier sollten wir der Wissenschaft vertrauen. Man kann sich überlegen, dass sonst Fehlschlüsse entstehen.

Anja: Das muss ich wohl einsehen.

Ronny: Aber wozu ist das denn überhaupt gut?

Lehrer Krause: Wenn man logische Schlüsse ziehen will, ist die Bedingtheit entscheidend. Ich will es Euch **an einem Alltagsbeispiel** erklären. Das wird jetzt etwas theoretisch.

Wir betrachten zwei Sätze, die in diesem Beispiel bejaht werden:

Satz 1: Wenn die Sonne in mein Schlafzimmer scheint (B),
so ist die Sonne aufgegangen (A),

d. h. (*wenn B – so A' ist zu bejahen*).

Satz 2: Die Sonne scheint in mein Schlafzimmer (B),

d. h. (*B' ist zu bejahen*).

Ausgehend von diesen beiden Sätzen, *die in unserem Beispiel also eindeutig bejaht werden*, entsteht die konkrete Frage, **ob ,A' (also der Inhalt des Satzes ,Die Sonne ist aufgegangen')** **zu bejahen oder zu verneinen ist.**

Dazu kann uns diese Urteilstabelle helfen, die wir jetzt schon mehrfach gesehen und geprüft haben. Man kann sie wie eine Formel benutzen. Denn aus ihr lässt sich ablesen, ob ,A' zu bejahen oder zu verneinen ist.

Versuchen wir es gemeinsam. Seht Euch bitte die rechte Spalte an. Für das 1. Urteil , *wenn B – so A'* gibt es also dort zunächst **drei (bejahte) Möglichkeiten** (in der 1., 2. und 4. Zeile):

	B	A	wenn B – so A
1.	ja	ja	ja
2.	nein	ja	ja
3.	ja	nein	nein
4.	nein	nein	ja

Jetzt zum 2. Urteil für ,B'. Seht wieder in die Urteilstabelle, diesmal in die linke Spalte. Es gibt dort **zwei (bejahte) Möglichkeiten** (in der 1. und 3. Zeile):

	B	A	wenn B – so A
1.	ja	ja	ja
2.	nein	ja	ja
3.	ja	nein	nein
4.	nein	nein	ja

Lehrer Krause (setzt fort): Es zeigt sich aber in der Tabelle, dass im Fall der Bejahung für ,B' in der 3. Zeile dann zugleich (rechte Spalte) die Aussage ,wenn B – so A' verneint wird. Da in unserem Beispiel jedoch ,Wenn B – so A' bejaht sein soll, ...

Paula (ruft erfreut):...verbleibt nur die Möglichkeit in der 1. Zeile!

	B	A	wenn B – so A
1.	ja	→ ja ←	ja
2.	nein	ja	ja
3.	ja	nein	nein
4.	nein	nein	ja

,A' ist zu bejahen. Die Sonne muss bereits aufgegangen sein. Das steht eindeutig fest. Es gibt keine andere Möglichkeit.

Lehrer Krause: Sehr gut, Paula! Dieser logische Schluss war für Frege der entscheidende.

Man nennt ihn auch *Abtrennungsregel* (lat.: *Modus ponens*).

Wenn B – so A wahr (ja)

B wahr (ja)

A wahr (ja)

Im Alltag fußen solche Schlussfolgerungen weitgehend auf dem gesunden Menschenverstand, und so war es auch in der Antike bei Aristoteles, während hier zweifelsfrei und – das ist das Entscheidende – unabhängig von der Sprache (dem sprachlichen Ausdruck eines konkreten Satzinhalts) logisch geschlossen wird.

Gottlob Frege ist der Erfinder der modernen formalen Logik, in der in den Aussagen auch sogenannte Quantoren vorkommen können (Allgemeinheit: für alle x gilt, Existenz: für einige x gilt). Das gab es zwar auch schon bei Aristoteles, aber eben nur in festgefühten Schlussfiguren.

Bei Frege tritt die Allgemeinheit in Verbindung mit logischen Funktionen F auf, die Wahrheitswerte haben (wahr, falsch). Die Existenz wird mit Hilfe der Verneinung auf die Allgemeinheit zurückgeführt. Wenn $F(x)$ bedeutet, dass x durch 2 teilbar ist, dann ist das nicht für alle natürlichen Zahlen x , aber für einige (viele) wahr. Die Funktion F steht hier für den Begriff „durch 2 teilbare Zahl“ bzw. „gerade Zahl“. Daher werden in Aussagen Begriffe erfasst, wie schon der Name Begriffsschrift zum Ausdruck bringt.

Aufbauend auf diesen ganz einfachen, ersten Überlegungen hat Frege **ein großes Formelwerk** geschaffen, mit dem man, wie in der Mathematik, mit Formeln neue Einsichten gewinnen kann. Mit Freges Formeln lassen sich auch komplizierte Aussagen des Alltags und der Wissenschaft ausdrücken und auf Wahrheit prüfen.

Paula: Herr Krause, können Sie das noch einmal erklären? Wie geht das mit den Formeln?

Lehrer Krause: Es ist zu zeitaufwendig und kompliziert, das jetzt im Einzelnen zu erklären. Wer später von euch Philosophie studiert, wird sicher noch mehr dazu hören und seine Formeln und das, was heute daraus geworden ist, kennenlernen. Das Prinzip aber, die axiomatische Methode, besteht in Folgendem:

Frege verwendet einige wenige logische Grundaussagen, sogenannte Axiome, als Ausgangspunkt. Das sind solche Aussagen, die sofort einzusehen sind oder die man einfach als wahr voraussetzt. Durch logische Verknüpfung dieser Grundaussagen in seinen Formeln konnte er dann mit Hilfe der Bedingtheit, der Negation und der Allgemeinheit viele weitere Aussagen als wahr oder falsch nachweisen. Unter anderem hat ihn das später weltberühmt gemacht.

Mit Hilfe seiner genialen Überlegungen gelangte Frege schrittweise in einen Raum der Abstraktion, in dem diese Weiterentwicklung der Logik zu wissenschaftlich zwingenden Ergebnissen führt. Die formale Logik bewährt sich überall in der Wissenschaft, wo man auf die Lückenlosigkeit einer Beweisführung Wert legen muss. Ich wiederhole: Unabhängig vom sprachlichen Ausdruck eines konkreten Satzinhalts und unabhängig von der verwendeten Sprache, wie Deutsch, Englisch oder Chinesisch.

Frege hat mit der formalen Logik auch die Struktur von Sprachen untersucht und gilt als der Begründer der analytischen Philosophie. Und von dort ist es nicht weit bis zur Künstlichen Intelligenz.

Ronny: Das macht Eindruck.

Anja: Ich finde es auch cool. Logik ist spannender als ich dachte.

Lehrer Krause: Ich hoffe, dass Ihr die Grundidee der formalen Logik verstanden habt. Stellt euch vor, Gottlob Frege war erst 31 Jahre alt, als er die Begriffsschrift im Jahr 1879 veröffentlichte. Solche Großtaten sind nur wenigen vergönnt. Frege, der Schüler unserer Schule war und hier 1869 sein Abitur abgelegt hat, gilt heute als einer der größten abendländischen Denker überhaupt.

Quellenangaben

G. Frege (1879). Begriffsschrift. Halle a. d. Saale: Louis Nebert.

G. Frege (1882). Ueber die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift. Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, 81 (LXXXI), S. 48-56.

E. Framm, J. Framm und D. Schott (2022). Gottlob Frege – Der Aristoteles aus Mecklenburg. Romanbiografie erster Teil, Wismar.

E. Framm, J. Framm und D. Schott (2025). Gottlob Frege – Vordenker der digitalen Welt. Romanbiografie, Springer-Verlag.

BEGRIFFSSCHRIFT,

EINE DER ARITHMETISCHEN NACHGEBILDETE

FORMELSPRACHE

DES REINEN DENKENS.

VON

Dⁿⁱ GOTTLOB FREGE.

PRIVATDOCENTEN DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT JENA.



HALLE A/S.

VERLAG VON LOUIS NEBERT.

1879.

Titelblatt der Begriffsschrift



Die Logik hat nach Gottlob Frege die Aufgabe, die Gesetze des Wahrseins zu erkennen. Seine zweiwertige Logik ist für die Computertechnik und deren Anwendungen von ganz besonderer Bedeutung. Heute sind diese Errungenschaften selbstverständlich, aber die von Frege entwickelte und in der „Begriffsschrift“ formulierte Logik ist für viele schwer zu fassen. In einem fiktiven Schulgespräch wird versucht, die einfachsten Grundlagen seines großen Werkes verständlich darzustellen.

