6
Begriffsschrift

Etwa vier Jahre arbeitete Gottlob Frege schon an einem Manuskript seiner „Begriffsschrift“, das Ende 1878 im Wesentlichen fertig war. Eine ganze Fülle von neuartigen Gedanken hatte sich in ihm geformt und herangebildet. Bei den eigentlichen wissenschaftlichen Abhandlungen begnügte er sich mit kurzen Kommentaren. Er hielt die von ihm ersonnene Formelsprache für weitgehend selbsterklärend, doch seine Absichten wollte er in einem Vorwort deutlich kundtun. Am 18. Dezember 1878 war es niedergeschrieben.

In diesen Wochen zog die inzwischen 64-jährige Mutter Auguste zu Gottlob nach Jena. Die höhere Töchterschule, die sie nach dem Tod ihres Mannes Alexander zwölf Jahre geleitet hatte, war von der Stadt übernommen worden. Auch der bisher noch bei ihr wohnende Sohn Arnold ging inzwischen eigene Wege. Nach reiflicher Überlegung hielt sie es für ratsam, den Lebensabend bei ihrem älteren Sohn in Jena zu verbringen. Sie äußerte sogar die Absicht, dort ein Wohnhaus zu bauen.

Im fernen Wismar hatte die Mutter nur aus den Briefen etwas über ihren Ältesten erfahren. Nun war sie tagtäglich um ihn. Sie spürte, wie sehr Gottlob in dieser Zeit durch die Arbeit an seinem Manuskript zur Logik geplagt und umgetrieben wurde. Eines Tages sagte sie zu ihm: „Erzähle mir bitte davon. Wovon handelt es? Welche Absichten verfolgst Du damit?“ Gottlob staunte, dass seine Mutter so interessiert war. Könnte er ihr etwas von dem nahebringen, was ihn so sehr beschäftigte?

„Du weißt ja, dass Vater immer wieder über das klare Denken gesprochen hat. Und es lässt mich nicht mehr los. Sogar in der auf Exaktheit bedachten Mathematik beobachte ich immer wieder, dass etwas als wahr vorausgesetzt wird, was zu hinterfragen ist. Nach der Habilitation versuchte ich, ein rein logisches Werkzeug zu erfinden, mit dem man zu klaren, von subjektiven Absichten und Vorstellungen befreiten Urteilen gelangen kann. Man muss die Entdeckung von wissenschaftlichen Wahrheiten, die sich oft auf Psychologie und Erfahrung stützt, und die wissenschaftliche Begründung dieser Wahrheiten streng unterscheiden. Das wird vielfach durcheinandergebracht.“ Gottlob ergänzte: „Außerdem soll von der besonderen Beschaffenheit der Dinge abgesehen werden. Es geht mir um die vollkommenste Art der Beweisführung, letztlich die Gesetze des reinen Denkens.“

Er zeigte der Mutter sein Titelblatt. Dort stand:

BEGRIFFSSCHRIFT,
EINE DER ARITHMETISCHEN NACHGEBILDETE
FORMELSPRACHE
DES REINEN DENKENS

„Gottlob, ist Dir da wirklich etwas gelungen?“, wollte sie wissen.

„Ja, das funktioniert zweifelsfrei“, war seine bestimmte Antwort. „**Die Arithmetik … ist der Ausgangspunkt des Gedankenganges gewesen, der mich zu meiner Begriffsschrift geleitet hat.** [FG8] Ich will das Rechnen mit Zahlen auf eine sichere Grundlage stellen und damit auch die anderen Gebiete der Mathematik.“

„Dazu möchte ich mehr erfahren. Kann ich einmal in Deinem Manuskript lesen?“, wünschte nun die Mutter.

„Lass mich lieber versuchen, Dir einiges verständlich zu machen. Diese Formelsprache ist ungewöhnlich und verwickelt. Sogar Professoren äußern sich bisher zurückhaltend, weil sich ihnen meine Einsichten nur mit großer Mühe erschließen. Bei meinem Vortrag ‚Anwendungen der Begriffsschrift' im Januar 1879 vor der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft gab es kaum Resonanz, sicher wegen fehlender Erläuterungen. Ich muss einen Weg finden, mein Anliegen verständlicher zu machen. Vielleicht kann ich Dir in den nächsten Wochen mit kleinen Schritten eine Vorstellung davon geben."

Als die Mutter schließlich in ihr Zimmer ging, um sich auf die Nachtruhe vorzubereiten, war sie voller Gedanken. Alexander fehlte doch sehr. Auch für Gottlob wäre er eine wichtige Stütze gewesen.

„Schade, dass der Sohn diese Ideen nicht mehr mit seinem Vater besprechen kann", dachte sie traurig. Das intensive Streben nach der Wahrheit musste der Sohn von ihm haben. Nun würde sie hoffentlich bald selbst etwas an dieser Gedankenwelt teilhaben können. Sie ahnte aber schon, dass es bei sehr einfachen Vorstellungen bleiben würde.

Bald saßen sie sich wieder gegenüber.

„Weißt Du", sagte er der Mutter zugewandt, „bei den Arbeiten zur Dissertation und Habilitation spürte ich, dass die Grundlagen der Mathematik weitgehend ungeklärt sind. Plötzlich tauchten so viele Fragen auf. Was sind eigentlich natürliche Zahlen, von denen wir glauben, sie gut zu kennen? Kann ich sie in meiner Begriffsschrift darstellen? Mit welcher Berechtigung gehen wir mit ihnen in der gewohnten Weise um? Wie sicher ist die Arithmetik, ja, die Mathematik überhaupt? Ist die Wahrheit ihrer Aussagen streng logisch beweisbar?" Er holte tief Luft.

„Es muss die Logik sein, Mutter, die uns die angestrebten Auskünfte geben kann. Sie lässt durch festgelegte Verknüpfungen der Gedankeninhalte erkennen, ob etwas wahr oder falsch ist. Aber die Logik unserer Tage fußt weitgehend auf der Syllogistik des Aristoteles. Sie leistet nicht das, was ich brauche. Bei ihm ist sie noch zu sehr an die Muster der gewöhnlichen Sprache gebunden. Davon muss ich mich lösen. Auch die neueren Arbeiten zur Logik sind in meinem Sinn nicht ergiebig."

„Was sagst Du da? Aristoteles?", unterbrach die Mutter mit einiger Unruhe, „mein Sohn, willst Du wirklich in seine Fußstapfen treten? Und dann noch auf unsere schöne Sprache verzichten? Kein Wunder, dass man Dich dann nicht versteht."

„Es ist aber notwendig, die Logik des Aristoteles weiterzuentwickeln und durch eine neue Art der Logik zu ersetzen, und meine Begriffsschrift tut das auch", antwortete Gottlob mit ruhiger Überzeugung.

„Mutter, Du musst Dir das so vorstellen. Meine Begriffsschrift ist ein wissenschaftliches Hilfsmittel. Alle Erfindungen unseres Jahrhunderts beruhen darauf, dass man für die Forschung neue Methoden entwickeln konnte. Denke doch nur an das Mikroskop, das von Professor Abbe hier in Jena so großartig verbessert wurde. Am Beispiel des Mikroskops lässt sich aber noch mehr erklären", setzte er fort. „**Das Verhältnis meiner Begriffsschrift zu der Sprache des Lebens glaube ich am deutlichsten machen zu können, wenn ich es mit dem des Mikroskops zum Auge vergleiche**. Zunächst muss man erst einmal staunen, was schon das Auge vermag. Es kann in die Nähe und in die Ferne schauen, es kann rundum blicken, Farben erkennen, Hell und Dunkel unterscheiden. Das kann das Mikroskop nicht, es hat weder diese Beweglichkeit noch die anderen Eigenschaften. Für einen bestimmten wissenschaftlichen Zweck, wenn es um die **Schärfe der Unterscheidung** geht, ist es **auf das** vollkommenste angepasst, aber eben dadurch für alle andern Zwecke unbrauchbar. Die Begriffsschrift soll das Denken schärfen, während die Umgangssprache der allgemeinen Verständigung dient.“ [FG6]

„Das hast Du recht anschaulich gemacht, mein Großer“, sagte die Mutter. Unbeirrt sprach Gottlob weiter: „Unsere Sprache hat eine gewisse Weichheit und Veränderlichkeit. Das ist die Bedingung ihrer Entwicklungsfähigkeit und vielseitigen Tauglichkeit. Für meine Untersuchungen zu den Zahlen genügt die Wortsprache nicht.“ Gottlob überlegte kurz und ergänzte: „Wir bedürfen eines Ganzen von Zeichen, aus dem jede Vieldeutigkeit verbannt ist, dessen strenger logischer Form der Inhalt nicht entschlüpfen kann.“ [FG12]

Gottlob setzte dann fort: „Wenn ich Dir jetzt das Manuskript zeige, findest Du darin viele Symbole, Striche sowie griechische, lateinische und deutsche Buchstaben. Das mag verwirren. Aber glaube mir, darin ist eine eindeutige Schlüssigkeit. Ich kann natürlich nur hoffen, dass meine Begriffsschrift gelesen und verstanden wird. Sie erscheint zwar wie eine abstrakte Logik in Formelbildern, aber ein Inhalt wird durch meine Zeichen in genauerer und übersichtlicherer Weise zum Ausdruck gebracht, als es durch Worte möglich ist.“

„In Deinem Manuskript ist bisher nur die logische Methode enthalten, die eigentlichen Untersuchungen zur Mathematik sollen später erfolgen?“, fragte die Mutter nach.

„Ja, so ist es. Ich habe mich entschlossen, jetzt schon mit der Begriffsschrift in den Druck zu gehen, weil, wie ich Dir angedeutet habe, die Zukunft der gesamten Universität hier in Jena unsicher ist. Natürlich geht es ums Geld. Trotz des allgemeinen Aufschwungs, den man überall sehen kann, ist die finanzielle Unterstützung für die Universität eher dürftig. Man hat mir geraten zu drucken, damit ich im Fall einer Bewerbung an einer anderen Hochschule etwas vorzuweisen habe. Im Übrigen bin ich mir sicher, dass die

Begriffsschrift auch für weitere wissenschaftliche Aufgaben dienlich sein wird. Zunächst geht es mir um die Arithmetik der Zahlen, dann auch um die Differential- und Integralrechnung sowie um die Geometrie. Außerdem sind die Bereiche der Naturwissenschaft, wo zur Denknotwendigkeit noch die Naturnotwendigkeit hinzutritt, durch meine Logik leicht zu erschließen. Selbst den Philosophen dürfte sie ein brauchbares Werkzeug sein, um durch den Sprachgebrauch entstandene Täuschungen aufzudecken."

„Mein lieber Gottlob, für heute reicht es mir mit den allgemeinen Erklärungen. Aber zu den konkreten Ausführungen möchte ich noch mehr wissen", erklärte die Mutter. Ihre Gedanken gingen zurück in Gottlobs Kindheit. Ach, wie einfach war es doch damals, als sie ihm in Wismar die Anfänge des Lesens und Rechnens beibrachte. Mit etwas Wehmut dachte sie an diese Zeit zurück.

„Mal sehen, wie weit ich Gottlob werde folgen können. Die akademische Welt ist sehr anregend und anstrengend zugleich", dachte sie noch.

Abb. 8: Gottlob Frege um 1875 [8]

Als sie an einem der folgenden Tage wieder einmal beieinandersaßen, fragte die Mutter: „Aber was hast Du nun mit den natürlichen Zahlen? Was stört Dich an ihnen? Mit welcher genaueren Absicht willst Du später Deine Untersuchungen zu den Zahlen durchführen?“

Gottlob sagte: „Ich gebe Dir ein Beispiel mit dem Satz ‚**die Zahl Eins ist ein Ding**‘.“ [FG14]

„Ist sie das nicht auch?“

„Ja, Mutter schon, nur ist das nicht eindeutig.“

„Aber Gottlob, die Eins ist eine Eins, was sonst!“

„Schau bitte genauer hin. In diesem Satz kommt *die,* ein bestimmter Artikel, und zum anderen *ein*, ein unbestimmter Artikel, vor. Das ist aber keine Definition, denn es gibt nur *eine* Zahl Eins, aber *viele* Dinge. Ein Ding kann alles Mögliche sein, und so könnte derselbe Satz von der Zahl Eins für jeden etwas Verschiedenes bedeuten, **es gäbe keinen gemeinsamen Inhalt solcher Sätze**. [FG14] In diese Gedanken möchte ich Ordnung bringen. Subjektives, Psychologisches muss verbannt werden, um eindeutige, unmissverständliche Aussagen zu gewinnen, das ist mein Anliegen.“

Die Mutter spürte, wie ernsthaft sich das künftige wissenschaftliche Arbeiten ihres Sohnes gestalten würde.

„Ich hoffe, dass ich Dir den springenden Punkt, das *punctum saliens* der Begriffsschrift, allmählich nahebringen kann. Du musst aber etwas Geduld haben, das wird sich Dir nicht gleich erschließen.“

Gottlob begann: „Eine Sprache der Wissenschaft muss entwickelt werden, die allein die Gesetze benutzt, auf denen alle Erkenntnis beruht. Du weißt, wie schwierig es in der Umgangssprache ist, Gedanken so auszudrücken, dass die Hörer oder Leser sie im gleichen wahren Sinne verstehen. In der Wissenschaft muss man aber Fehlerquellen ausmerzen, um zu sicheren Urteilen zu kommen. Nur so ist Wahrheit erreichbar. Diesem Ziel dient meine Begriffsschrift. Nun pass auf! Nehmen wir den Satz

A: ‚Der Morgen hat begonnen‘.

Ich könnte auch sagen: ‚Der Vormittag hat angefangen‘. Beide haben den gleichen *begrifflichen Inhalt,* der entweder zutrifft oder nicht, also beurteilbar ist, während die Vorstellung vom Morgen oder vom Vormittag für sich genommen keine solche Beurteilung zulässt. Zur Unterscheidung von anderen Inhalten, die ich danach verwende, spreche ich vom ‚Inhalt A‘.“ Gottlob zeichnete auf einem Blatt Papier:

$$\rule[0.5ex]{3em}{0.4pt}\,\mathsf{A}$$

„Das ‚A‘ kommt auf die rechte Seite. Ein waagerechter Strich links davon ist der *Inhaltsstrich*, der besagt, was wir ausdrücken wollen, zum Beispiel also ‚Der Morgen hat begonnen‘. Von diesem Inhalt machen wir uns zunächst nur eine Vorstellung, ohne ihn zu beurteilen. Dieser Inhalt kann entweder bejaht oder verneint werden.

„Ein kleiner senkrechter Strich am linken Ende ist nun der *Urteilsstrich*. Der besagt, dass der ‚Inhalt A‘ bejaht wird, also in unserem Beispiel, dass der Morgen tatsächlich begonnen hat:

$$\vdash\!\rule[0.5ex]{3em}{0.4pt}\,\mathsf{A}$$

Das Gegenteil ist damit ausgeschlossen.

Die *logische Verneinung* kann ich leicht hinzufügen. Wollen wir zum Ausdruck bringen, dass der Inhalt ‚Der Morgen hat begonnen' *nicht* stattfindet, dann wird in der Mitte des

waagerechten Striches ein kleiner senkrechter Strich nach unten gemacht, der *Verneinungsstrich*. Das sieht so aus:

Wenn die Verneinung bestätigt werden soll, also der Inhalt ‚Der Morgen hat begonnen' zu verneinen ist, folglich *der Morgen nicht begonnen hat*, wird wiederum links der Urteilsstrich angefügt. Das zeichne ich als

Wird die Verneinung des ‚Inhaltes A' nochmals verneint, d.h., schreiben wir zwei Verneinungsstriche vor dem A, so wird der ‚Inhalt A' bejaht: ‚nicht(nicht(A))' und ‚A' haben den gleichen begrifflichen Inhalt. Die *doppelte Verneinung* hebt sich auf.

Du hast sicher schon gemerkt, dass zur Bewertung prinzipiell nur ‚ja' oder ‚nein', Bejahung oder Verneinung, zugelassen sind. Es gibt in meiner Formelsprache somit nur zwei Zustände. Ein Beispiel aus dem praktischen Leben wäre: Die Kerze ist ‚an' – das entspricht dann ‚ja' oder sie ist ‚aus' – das entspricht dann ‚nein'."

„Offenbar hat es eine besondere Bedeutung, dass nur diese beiden Urteilswerte zugelassen sind. Es gibt also kein ‚ungefähr' oder ‚vielleicht'?"

„Ja, so ist es, doch nun geht es weiter", setzte Gottlob fort, „angenommen, wir haben außer dem ‚Inhalt A' noch einen weiteren beurteilbaren ‚Inhalt B', wie zum Beispiel

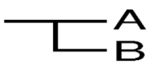
B: ‚Die Sonne scheint in Dein nach Osten gelegenes Schlafzimmer'.

Bei zwei beurteilbaren Inhalten ergeben sich grundsätzlich vier Fälle, da wir nur ‚ja' und ‚nein' zulassen. Die folgende Aufstellung der Möglichkeiten wird nun für weitere Betrachtungen stets verwendet:"

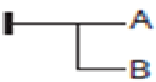
1) **A wird bejaht und B wird bejaht;**
2) **A wird bejaht und B wird verneint;**
3) **A wird verneint und B wird bejaht;**
4) **A wird verneint und B wird verneint.** [FG9]

Die Mutter schaute gespannt zu, was ihr Sohn aufgeschrieben hatte: „Aber damit kann ich noch nicht viel anfangen."

„Ja, dafür muss man beurteilbare Inhalte zu einem neuen beurteilbaren Inhalt verbinden", setzte Gottlob fort. „Da kommt die *Bedingtheit* ins Spiel. Ich brauche sie für meine logischen Schlüsse. Gottlob zeichnete:



„Also, in meine Formelsprache umgesetzt, sind die von A und der *Bedingung* B für A nach links abgehenden, waagerechten Striche wieder die Inhaltsstriche und der senkrechte Verbindungsstrich zwischen den Inhaltsstrichen ist dann der *Bedingungsstrich*. Wenn die Formel links mit einem Urteilsstrich versehen ist", sagte Gottlob und zeichnete,



„besagt dies, **dass die dritte dieser Möglichkeiten nicht stattfinde, sondern eine der drei andern.** [FG10] Weiterhin kann ich mit den Bedingtheiten und Verneinungen alles darstellen, was ich brauche."

„Mein Sohn, diese Formeln verstehe ich noch nicht", sagte die Mutter entschieden, „das erkläre mir bitte."

„Ja, natürlich, aber da muss ich etwas ausholen. Am einfachsten kann ich die Bedingtheit mit einem Beispiel aus dem Alltag erklären. Wie schon gesagt, gehen wir von zwei beurteilbaren Inhalten A und B aus. In der Umgangssprache wird die Bedingtheit etwa durch

‚wenn B – so A'

ausgedrückt. Wir benutzen die schon gewählten Inhalte und prüfen jetzt gemeinsam den Wahrheitsgehalt dieser Bedingtheit:

‚Wenn die Sonne in Dein Schlafzimmer scheint (wenn B)**, so hat der Morgen begonnen** (so A)**'**.

Nun schau Dir einmal die vier Kombinationen an." Es entstand die folgende Urteilstabelle:

A	**B**	**wenn B - so A**
ja	ja	ja
ja	nein	ja
nein	ja	nein
nein	nein	ja

Gottlob erklärte dazu: „In der linken und mittleren Spalte stehen oben die Inhalte A und B, darunter, entsprechend den vier bereits genannten Möglichkeiten, die Bewertung der Inhalte. In der rechten Spalte siehst Du dann das Ergebnis für die Bedingtheit, deren Bewertung. Die dritte Möglichkeit ist, wie schon gesagt, ausgeschlossen, das heißt, sie wird hier mit ‚nein' bewertet. Wir wollen das einmal veranschaulichen. Stell Dir bitte die Situation in Deinem Schlafzimmer vor."

„Ich probiere es mit der ersten Zeile. Wenn die Sonne in mein Schlafzimmer scheint und somit der Morgen begonnen hat, weil die Fenster ja nach Osten gehen, ist die oben genannte Bedingtheit zu bejahen.

Nun die zweite Zeile: Wenn die Sonne wie bei bewölktem Himmel *nicht* in mein Schlafzimmer scheint, aber der Morgen trotzdem begonnen hat, wird die oben genannte Bedingtheit nicht unwahr, wir wollen sie daher bejahen. Wir würden sie nicht bejahen, wenn die Bedingtheit lautete: ‚*Nur* wenn die Sonne in mein Schlafzimmer scheint, hat der Morgen begonnen' – das steht da aber nicht."

„Richtig, nun bitte die dritte Zeile", forderte der Sohn.

„Wenn die Sonne in mein Schlafzimmer scheint und der Morgen in diesem Moment nicht begonnen hat, ist die oben genannte Bedingtheit nicht gegeben, sie ist folglich zu verneinen. Zuletzt noch die vierte Zeile. Wenn die Sonne tatsächlich nicht in das Schlafzimmer scheint, und in dieser Situation der Morgen nicht begonnen hat, dann ist die oben genannte Bedingtheit trotzdem nicht unwahr und kann daher bejaht werden", folgerte die Mutter mit einigem Zögern und nickte dann.

„Meine Zusammenstellung in der Tabelle stimmt also?", fragte Gottlob.

„Ja, sie ist noch zu verstehen", bemerkte die Mutter, „aber in den Zeilen zwei und vier bin ich eher unsicher."

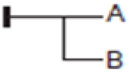
„Da kann ich Dir noch etwas helfen. In der rechten Spalte der Tabelle wird lediglich vermerkt, ob die Bedingtheit ‚wenn B – so A' bestätigt werden kann. Und in der dritten Zeile wird sie eben nicht bestätigt. Denn es kann doch nicht sein, dass die Sonne in Dein nach Osten gelegenes Schlafzimmer scheint und der Morgen nicht begonnen hat. In den Zeilen zwei und vier ist hingegen die Bedingtheit nicht zwingend zu verneinen. Deren Bejahung hat sich in der Sprache des reinen Denkens als sinnvoll erwiesen. Dort muss auch kein direkter Zusammenhang zwischen A und B bestehen wie in unserem Beispiel."

„Das muss ich wohl einsehen. Die Verneinung der Aussage ‚wenn B – so A' in der dritten Zeile ist wirklich zwingend. Aber wozu ist das gut?", wollte nun die Mutter wissen.

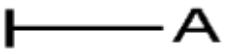
„Ich will es Dir am Beispiel einer wichtigen *Schlussregel* der Logik erklären. Im Grunde ist das die einzige Regel, die ich benötige. Alle anderen Schlüsse kann ich darauf zurückführen. Dabei geht es darum, *aus zwei beurteilten Inhalten einen dritten beurteilten Inhalt zu folgern*." Er schrieb für die Mutter auf:

1. Urteil:	‚wenn B – so A' ist zu bejahen
2. Urteil:	‚B' ist zu bejahen
3. Urteil (Folgerung):	‚A' ist zu bejahen

„Mit meinen Formelbildern sieht die Regel so aus:

1. 

2. 

3. 

Wie kommt nun diese Schlussfolgerung zustande? Von den vier möglichen Fällen ist der dritte durch die erste Formel, der zweite und vierte Fall aber durch die zweite Formel ausgeschlossen, so dass nur der erste Fall übrigbleibt.

Du kannst aber zur besseren Anschauung auch erneut unsere Urteilstabelle zur Bedingtheit zu Hilfe nehmen“, forderte Gottlob die Mutter auf. Er zeigte sie ihr noch einmal:

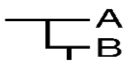
A	**B**	**wenn B – so A**
ja	ja	ja
ja	nein	ja
nein	ja	nein
nein	nein	ja

„Ich sehe, wenn B - so A‘ zu bejahen ist, gibt es zunächst drei Möglichkeiten. Soll aber *zugleich* B bejaht werden, verbleibt nur die eine Möglichkeit in der ersten Zeile. Folglich gilt: *A ist zu bejahen!*“, freute sich die Mutter.

„Im Alltag fußt eine solche Schlussfolgerung weitgehend auf dem gesunden Menschenverstand, während sie hier zweifelsfrei und unabhängig von der Sprache logisch geschlossen wird.

Ich habe für Dich ein Blatt vorbereitet, was Du Dir einmal in Ruhe anschauen kannst. Es enthält auch zwei *logische Gesetze*, Formelbilder, die unabhängig von ihren Inhalten immer zu bejahen sind. Im ersten Gesetz geht es um die Verknüpfung von Inhalten durch das Wort ‚oder' und im zweiten Gesetz durch das Wort ‚und'.

Die Formel



steht für *‚A oder B'*. Im Urteil wird in der Aufstellung [FG9] nur der vierte Fall verneint, und die anderen werden bejaht. Setzt man für ‚B' die Verneinung von ‚A' ein, dann entsteht in der Formel

‚wenn A – so A'

(doppelte Verneinung entfällt) bzw.

‚A oder (nicht A)'.

Es bleiben nur zwei zu bejahende Fälle übrig. Zu A und seinem Gegenteil gibt es nichts Drittes.

Weiter bildet die Formel

die Verknüpfung *‚A und B'* ab. Im Urteil wird in der Aufstellung [FG9] nur der erste Fall bejaht, und die anderen werden verneint. Ersetzt man wieder ‚B' durch die Verneinung von ‚A', so verbleiben nur zwei zu verneinende Fälle. Deren Verneinung, also

‚wenn (nicht A) – so (nicht A)'
(doppelte Verneinung entfällt) bzw.
‚nicht (A und (nicht A))',

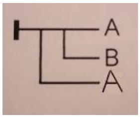
wird daher stets bejaht. Es kann also nicht zugleich A und sein Gegenteil gelten.

Wir wollen jetzt ein Urteil aus mehreren Bedingungen betrachten ", setzte Gottlob fort, „ich nehme zum Beispiel die zweifache Bedingtheit mit Urteilsstrich.

In Worten heißt das: Es gilt, wenn C und B, so A. Genauer bedeutet das: Es gilt, wenn C, so (wenn B, so A).

Für beide Bedingungen steht jeweils ein Bedingungsstrich. Es lassen sich jederzeit weitere Bedingungen D, E, F mit Hilfe von Bedingungsstrichen anfügen. Wenn diese Bedingungen jeweils zutreffen und die Bedingtheit ebenfalls zutrifft, so trifft auch A zu, das heißt ‚Inhalt A' ist zu bejahen.

Jetzt kann ich Dir eine wichtige Formel zeigen, indem ich C durch A ersetze", Gottlob zeichnete:



„Wozu dient sie?", wollte die Mutter wissen.

„Diese Formel wurde in meine Begriffsschrift aufgenommen. Sie hat die Eigenschaft eines *Grundgesetzes*", sagte Gottlob mit Nachdruck, „und sie hat unter anderem für die Mathematik eine große Bedeutung. Wenn man zum Beispiel wissen will, ob der

Satz A: ‚Alle Winkel in einem Dreieck haben
zusammen 180 Grad'

auch dann gilt, wenn der

Satz B: ‚Einer der Winkel hat 90 Grad'

zutrifft, dann braucht man genau dieses Urteil." [FG11]

„Ist das denn nicht klar?", zweifelte die Mutter.

„Doch schon, aber genau betrachtet, bleibt es zunächst fraglich. Das zweifelsfreie Ergebnis kann man nun aus meiner Formel herleiten. Es ergibt sich ", Gottlob schrieb:

1. Urteil: ‚wenn A – so (wenn B – so A)' ist zu bejahen

2. Urteil: ‚A' ist zu bejahen

----

3. **Urteil (Folgerung):** ‚wenn B – so A' ist zu bejahen.

„Deine Formel sagt das also aus?", fragte die Mutter etwas unsicher.

„Ja, so ist es, aber ich kann Dir auch wieder eine Urteilstabelle aufstellen, wie Du sie schon kennst. Dann siehst Du es selbst, dass der Satz über die Winkelsumme im Dreieck nicht nur allgemein, sondern tatsächlich auch für Dreiecke mit einem Winkel von 90 Grad gelten muss."

„Danke, mein Sohn, doch ich habe das Prinzip jetzt verstanden", sagte die Mutter erfreut. Das war ihr nicht ganz leichtgefallen.

Einige Zeit später ergab sich erneut eine Gelegenheit, über die Begriffsschrift zu sprechen.

„Ich weiß noch nicht recht, warum Du Deine Zeichenschrift gleich in zwei Richtungen entwickelst, waagerecht und senkrecht", wollte die Mutter wissen.

„Für mich ist diese Darstellung einfach übersichtlicher. Sie nutzt die zweifach ausgedehnte Schreibfläche von oben nach unten und von links nach rechts. Die Inhalte stehen ganz rechts und deutlich voneinander getrennt, links davon werden die Gedankenverknüpfungen, die logischen Beziehungen der Inhalte durch die senkrechte Linienverbindungen leichter auffindbar. Ich brauche außerdem keine Klammern. Das erleichtert die Erfassung der Zusammenhänge weit mehr als die rein lineare Anordnung, wie sie bisher üblich war." [FG13]

Bei einer letzten Zusammenkunft zur Begriffsschrift kam Gottlob zu einem weiteren wichtigen Punkt:

„Das eigentlich Neue für die Logik ist nun, wenn Buchstabenzeichen für Dinge und damit Funktionen ins Spiel kommen. Die Begriffe ‚Subjekt' und ‚Prädikat' des Aristoteles wie zum Beispiel in dem Satz

‚Der Vogel dort oben kann fliegen.'

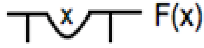
werden durch die Begriffe ‚Argument' und ‚Funktion' ersetzt, hier ist der spezielle ‚Vogel' das Argument x und ‚Flugfähigkeit' die Funktion F, die eine Eigenschaft ausdrückt. Ich schreibe dann allgemein F(x).
Meisen können fliegen, Strauße nicht. Also wird F(x) bejaht, wenn x eine Meise ist und F(x) verneint, wenn x ein Strauß ist. Zugleich ist ‚Flugfähigkeit' ein Begriff, der alle Gegenstände (wie etwa Vögel) erfasst, die unter ihn fallen (für die die Flugfähigkeit zu bejahen ist). Nicht zufällig heißt meine Logik ‚Begriffsschrift'.

Nun betrachte die beiden Thesen:

Alle Vögel können fliegen.
Einige Vögel können fliegen.

Die erste These betrifft die *Allgemeinheit* im Sinne von ‚für alle … gilt'. Sie ist zu verneinen. Es gibt also Vögel, die nicht flugfähig sind.
Die zweite These betrifft die *Existenz* im Sinne von ‚für mindestens ein … gilt'. Sie ist zu bejahen, denn Meisen sind flugfähig, und viele andere Vögel sind es auch.

In der Begriffsschrift werden für solche Sachverhalte die folgenden Formelbilder verwendet:



Das erste betrifft die Allgemeinheit: Für alle x gilt F(x) bzw. alle x haben die Eigenschaft F. Dabei stehen die betreffenden Gegenstände x in einer Höhlung.

Das zweite benutzt die Allgemeinheit unter Einbeziehung von zwei Verneinungen, um die Existenz von Gegenständen x auszudrücken.
Zum Beispiel ist der Satz

‚Nicht alle verstehen die Begriffsschrift nicht‘,

gleichbedeutend mit dem Satz

‚Mindestens einer versteht die Begriffsschrift.‘

Eine Funktion kann auch zwei oder mehr Argumente enthalten. Dann werden nicht Eigenschaften, sondern Beziehungen ausgedrückt. Ich will zum Beispiel das Gewicht von Vögeln vergleichen. So soll etwa F(x, y) besagen, dass der Vogel x schwerer als der Vogel y ist.“

„Oder dass der Vogel x schneller als der Vogel y fliegt?“ warf die Mutter ein.

„Ja, auch das ist eine mögliche Beziehung. Es lassen sich noch viele weitere Fälle anführen“, erwiderte Gottlob. Er hing kurz seinen Gedanken nach und setzte fort:

„Nun will ich Dir noch einen logischen Schluss angeben, in dem ‚Allgemeinheit‘ – also ‚alle‘ - und ‚Existenz‘ – also ‚ein‘
beziehungsweise ‚einige‘ – vorkommen. Auch hier geht es wieder darum, dass aus zwei Urteilen ein drittes Urteil geschlossen wird.“ Gottlob sagte: „Du erinnerst Dich sicher an das Urteil:

Hier geht es jedoch um eine Schlussregel, bei der aus zwei Urteilen ein drittes Urteil gefolgert wird:

C: Alle Physiker sind Naturwissenschaftler.
B: Einige Wissenschaftler sind keine Naturwissenschaftler.

A: Einige Wissenschaftler sind keine Physiker.

Die Einzelheiten der Beweisführung will ich Dir ersparen. Das ist übrigens ein Schluss, der schon in der Syllogistik des Aristoteles vorkommt. Dort gelingt er durch Rückführung auf bestimmte allgemein akzeptierte Grundformen, während er mit Hilfe meines formalen Verfahrens zweifelsfrei logisch hergeleitet werden kann. Das wirkt zwar umständlich, ist aber sicher."

„Gottlob, großartig! Ich begreife, wie Du mit Hilfe Deiner Formeln gedankliche Inhalte verbinden kannst und zu neuen logischen Schlussfolgerungen kommst, ohne den gesunden Menschverstand und ohne die Schwierigkeiten mit der Sprache berücksichtigen zu müssen. Ich ahne nun auch, welche wissenschaftlichen Möglichkeiten sich mit Deinem Verfahren auftun könnten."

„Mutter, und das geht immer so weiter, eine Überlegung mit der Formelsprache folgt aus der anderen. Besonders hilfreich waren mir, wie Du schon sehen konntest, die *Bedingtheit* und die *Verneinung*, auf die man die anderen möglichen Verknüpfungen reduzieren kann. Hinzu kamen *Funktion* und *Allgemeinheit*. Ich kam gar nicht davon los und gelangte in den vergangenen Jahren mit Hilfe meiner Zeichen schrittweise in einen Raum der Abstraktion, in dem diese Weiterentwicklung der Logik, meine Begriffsschrift, zu wissenschaftlich brauchbaren, zwingenden Ergebnissen kommt", sagte Gottlob.

„Kannst Du mir auch schon zeigen, wie Du nun die Grundlagen der Mathematik untersuchst?" wollte die Mutter noch wissen.

„Nein, das kommt erst. Was ich mit meiner Begriffsschrift gefunden habe, ist das Instrumentarium, die Methode für die künftigen Arbeiten“, erklärte der Sohn.

Gottlob Frege hatte erkannt, dass die Verwendung seiner Zeichen auf anderen Gebieten immer dann–sinnvoll war, wenn man auf die Schlüssigkeit und Lückenlosigkeit einer Beweisführung Wert legte. Die logischen Verhältnisse kehren überall wieder, Zeichen für die besonderen Inhalte können so gewählt werden, dass sie sich in den Rahmen der Begriffsschrift einfügen.

Schon seit dem Herbst 1878 hatte sich Gottlob Frege bemüht, einen Verlag für das Manuskript zu finden. Das war schon deshalb schwierig, weil er weitgehend unbekannt war. In einer Jenaer Druckerei stellte sich außerdem heraus, dass seine mathematischen Darstellungen, die Zeichen und Formelgebilde einen besonderen Aufwand bedeuteten und für einen vernünftigen Preis kaum umzusetzen wären. Was konnte er tun? Frege sprach mit Paul Langer. Dieser war ein Jahr nach ihm Privatdozent für Mathematik und Physik an der Philosophischen Fakultät geworden. Langer konnte eine Publikation über die Grundprobleme der Mechanik bei einem Hallenser Verlag unterbringen. Dieser Verlag von Louis Nebert publizierte offenbar viele Arbeiten erstklassiger Mathematiker. Außerdem erschienen bei ihm auch Werke, die über die reine Mathematik hinausgingen. Das war den Inseraten zu entnehmen, die man in den bedeutenden „Mathematischen Annalen“ lesen konnte. Auch der in Jena bekannte Professor Carl Johannes Thomae, der Ordinarius in Freiburg, hatte eine ganze Reihe wissenschaftlicher Werke bei Nebert veröffentlichen lassen.

Gottlob Frege fasste sich ein Herz, schickte das Manuskript nach Halle. Und er bekam umgehend Antwort! Louis Nebert war bereit, sein Buch herauszugeben. Der Verleger wollte als Buchdrucker den Hallenser Erhardt Karras beauftragen, der sich mit den schwierigen Anforderungen wissenschaftlicher Abhandlungen bestens auskannte. Nebert erklärte außerdem, dass das Buch schon im Frühjahr 1879 auf den Markt kommen könnte. Er versprach, mit Anzeigen in philosophischen Journalen für Freges Begriffsschrift zu werben. Unmittelbar nach dieser Zusage wurde begonnen, den Drucksatz zu erstellen. Als der Drucker dann kurz vor Weihnachten auch das Vorwort erhalten hatte, trafen schon im Januar 1879 die Druckfahnen ein. Gottlob Frege bat die Mutter, sich am Korrekturlesen zu beteiligen. Sie saßen manche Abende zusammen. Neben Druckfehlern waren auch kleinere Textänderungen notwendig. Der Drucker hatte erfreulicherweise Verständnis für alle Wünsche, und Anfang April 1879 kam die Begriffsschrift in die Welt.

Frege wurden einige Druckexemplare zugesandt. Was war das für ein schönes Gefühl! Er hoffte nun auf positive Reaktionen in der Fachwelt.

Als die Mutter das frisch gedruckte Buch in einer ruhigen Stunde zur Hand nahm, las sie in Gottlobs Vorwort:

> **„Wenn es eine Aufgabe der Philosophie ist, die Herrschaft des Wortes über den menschlichen Geist zu brechen … so wird meine Begriffsschrift, für diese Zwecke weiter ausgebildet, den Philosophen ein brauchbares Werkzeug werden können.“** [FG7]

Hatte ihr Sohn mit seinen gerade 30 Jahren wirklich etwas so Bedeutungsvolles geschaffen? Sie blickte gedankenvoll auf: „Wenn das ihr Alexander noch erlebt hätte!“ Wie oft hatte er zu ihnen über das klare Denken gesprochen als die höchste Vollendung des Menschengeistes. War das nicht eigentlich eine Aufforderung für den begabten Sohn gewesen? Auch die Buchstabenbilder für die Grammatik, damals in seinem Lehrbuch für die Schule, mochten Gottlob inspiriert haben, diesen erfolgversprechenden Weg zur Begriffsschrift zu gehen.

Überwältigt und demütig nahm sie Zuflucht in einem Gebet.

Bereits Anfang 1879 bahnte sich eine weitere, wichtige Entwicklung an. Fast fünf Jahre war es nun bereits her, dass sich Gottlob Frege habilitieren konnte und Privatdozent wurde. Professor Abbe förderte ihn, wo er nur konnte. Ein intensiver Kontakt wurde gepflegt, ob in der Mathematischen Gesellschaft Professor Schaeffers, sonntags bei den Abenden im Hause von Professor Snell, Abbes Schwiegervater, oder in der Medizinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft. Allmählich verdichtete sich an der Fakultät die Vorstellung, Frege zum außerordentlichen Professor zu berufen.

Es war der Philosoph Professor Rudolf Eucken, der sich an den Dekan der Fakultät, Professor Carl Fortlage wandte. Er führte aus, dass Frege schon neuneinhalb Semester an der Universität tätig sei und dass er soeben eine bemerkenswerte mathematisch-philosophische Arbeit zum Abschluss gebracht habe. Daraufhin forderte Fortlage seinerseits Ernst Abbe auf, eine Antragsbegründung für die neue Professur zu verfassen. Abbe wies in seinem Gutachten auf die hohe Qualifikation und vorzügliche Lehrtätigkeit Freges hin, die dazu führe, die strebsamen Studenten an die schwierige Materie der Mathematik heranzuführen.

Mit der Begriffsschrift dagegen, die er zu diesem Zeitpunkt nur als Manuskript kannte, tat er sich schwer. Er war der Meinung, dass sie kein glückliches schriftstellerisches Debüt sei. Abbe vermutete auch, dass sie nur von wenigen Kollegen verstanden, gewürdigt und gründlich gelesen werde. Und doch schien er etwas von ihrer Bedeutung zu spüren, wenn er schrieb, dass sie das Gepräge originaler Forschung trage und eine nicht gewöhnliche geistige Kraft verriete.

Auch Professor Snell, der sich krankheitsbedingt ganz aus der Lehre zurückziehen wollte, befürwortete die Berufung nachdrücklich. Er betonte, dass Frege ein unabhängiger, selbständiger Denker sei und von seinen Zuhörern in den Lehrveranstaltungen sehr geschätzt würde. Über die Begriffsschrift wollte er sich nicht äußern, da er sie noch nicht zu Gesicht bekommen hatte.

Schon auf der Sitzung der Fakultät am 11. Januar 1879 wurde der Antrag zur Berufung Freges angenommen. Doch nun mussten noch der Prorektor und die Ministerien zustimmen. Dem Kurator der Universität, Freiherrn von Tuercke, fiel die eher zurückhaltende Beurteilung der Begriffsschrift auf. Der Kurator vermutete, dass dies im Staatsministerium in Weimar Bedenken hervorrufen könnte. Da war es hilfreich, dass zu diesem Zeitpunkt in der „Jenaer Literaturzeitung" eine günstige Rezension der Begriffsschrift erschien.

Der Mathematiklehrer Dr. Kurd Laßwitz hatte sie verfasst. Er stammte aus Breslau und war seit 1874 am Gymnasium in Gotha tätig. Vielseitig interessiert und freisinnig hatte er keine Anstellung in Preußen gefunden, wo er ursprünglich eine Hochschullaufbahn anstrebte. Laßwitz fand offenbar einen guten Zugang zur Begriffsschrift. Er schrieb am Schluss seiner Besprechung, dass das „kleine, aber tiefdurchdachte Buch … ein wertvoller Beitrag zur Theorie des Denkens" [LK1] sei.

So kam es dann, dass das Großherzogliche Staatsministerium in Weimar am 16. Juli 1879 Gottlob Frege zum außerordentlichen Professor ernannte.

„Mutter, meine Berufung ist erfolgt, ich bin so erleichtert!“, berichtete er zu Hause strahlend.

„Mein Junge, was für eine gute Nachricht! Wie ich mich für Dich freue!“ Nun ist er schon Professor, dachte sie sehr froh und dankbar. Die Stelle war unbesoldet, und die Hörgelder der wenigen zahlenden Studenten aus den Vorlesungen waren nicht der Rede wert. Doch dies trübte die Freude nicht. Die eigenen Geldmittel würden sowohl den Bau eines gemeinsamen Wohnhauses in Jena als auch ihren Unterhalt der kommenden Jahre ermöglichen. Aber wer weiß, ging es der Mutter durch den Kopf, ob sie ausreichen würden, wenn ihr Sohn einmal an eine Familiengründung denken sollte.

Am 2. August 1879 wurde Gottlob Frege durch den Prorektor, Professor Paul Meyer, als außerordentlicher Professor der Universität Jena verpflichtet. Eine neue Etappe seiner akademischen Laufbahn hatte begonnen.

Mit der Begriffsschrift ist es Gottlob Frege gelungen, für die Logik ein Formelwerk zu schaffen, um sichere Erkenntnisse der Wissenschaft mit anderen wissenschaftlichen Aussagen so zu verbinden, dass neue zweifelsfreie Erkenntnisse gewonnen werden können.

Freges logische Methode hat nicht nur die Entwicklung der Mathematik und Philosophie in besonderer Weise gefördert. Später hat sie auch für die Informatik große Bedeutung erlangt.